

15. K m i t a n i e, v l n e n i e

1. Aká je doba kmitu harmonického pohybu telesa o hmotnosti $m = 10 \text{ g}$, ak vratná sila pôsobiaca naň pri výchylke $y = 3 \text{ cm}$ má hodnotu $F = 5 \cdot 10^{-2} \text{ N}$?

$$\left[T = 2 \pi \sqrt{\frac{m y}{F}} = 0,486 \text{ s} \right]$$

2. Teleso hmotnosti $m = 4 \text{ kg}$ koná v horizontálnej rovine harmonický pohyb podľa rovnice $y = 20 \sin \frac{\pi}{2} t$ [m]. Určte silu, ktorá naň pôsobí ako funkciu výchylky a veľkosť tejto sily v okamihu, keď výchylka $y = 10 \text{ m}$!

$$\left[F = \omega^2 m y; \quad F_{10} = 98,66 \text{ N} \right]$$

3. Sila $F = 8 \text{ N}$ predĺži pružinu o 4 cm . Vypočítajte dobu kmitu guľičky s hmotnosťou $m = 5 \text{ kg}$, ktorá kmitá na tejto pružine s amplitúdou 8 cm . Aké bude maximálne zrýchlenie guľičky a maximálna vratná sila pôsobiaca na guľičku?

$$\left[a_{\max} = \frac{k y_{\max}}{m} = 3,2 \text{ m s}^{-2}; \quad F_{\max} = k y_{\max} = 16 \text{ N}; \quad T = 1 \text{ s} \right]$$

4. Teleso visí na pružine a kmitá s periódou $T = 0,5 \text{ s}$. O koľko sa pružina skráti, keď teleso odstránime?

$$\left[\Delta y = A = \frac{T^2}{(2\pi)^2} g = 6,214 \text{ cm} \right]$$

5. Amplitúda kmitavého pohybu závažia na pružine je $A = 4 \text{ cm}$, doba kmitu $T = 1 \text{ s}$. Za aký čas vykoná závažie dráhu:

- a) z rovnovážnej polohy do krajnej polohy?
b) prvú polovicu tejto dráhy?
c) druhú polovicu tejto dráhy?

$$\left[t = \frac{\arcsin \frac{A}{A}}{\omega} = \frac{1}{4} T; \quad t_1 = \frac{\arcsin \frac{y_1}{A}}{\omega} = \frac{1}{12} T; \quad t_2 = t - t_1 \right]$$

6. Teleso koná harmonický kmitavý pohyb s amplitúdou $A = 0,12 \text{ m}$ a frekvenciou $f = 4 \text{ Hz}$. Vypočítajte:

- a) čas t potrebný na to, aby sa teleso dostalo z rovnovážnej polohy do bodu, kde výchylka má hodnotu $y = 0,06 \text{ m}$,
b) vypočítajte zrýchlenie telesa v tomto bode!

$$\left[t = \frac{\arcsin \frac{y}{A}}{2\pi f} = 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ s}; \quad a = \omega^2 y = 37,9 \text{ m.s}^{-2} \right]$$

7. Za aký čas sa výchylka hmotného bodu konajúceho harmonický kmitavý pohyb s frekvenciou $f = 54 \text{ Hz}$ a amplitúdou $A = 8 \text{ cm}$ zväčší z 3 cm na 7 cm ?

$$\left[\Delta t = \frac{\arcsin \frac{y_2}{A}}{2\pi f} - \frac{\arcsin \frac{y_1}{A}}{2\pi f} = 2,01 \cdot 10^{-3} \text{ s} \right]$$

8. Hmotný bod koná harmonický kmitavý pohyb s amplitúdou $A = 6 \text{ cm}$. V čase $t = 0 \text{ s}$ má maximálnu výchylku a v čase $t_1 = 10 \text{ s}$ bude jeho výchylka $y_1 = 2 \text{ cm}$. Za aký čas bude jeho výchylka $y_2 = 1 \text{ cm}$? (v prvej štvrtperióde)

$$\left[t_2 = 11,4 \text{ s}; \quad y = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

9. Teleso koná harmonický pohyb s periódou $T = 15 \text{ s}$ a amplitúdou $A = 10 \text{ cm}$. V istom časovom okamihu t_1 má výchylku z rovnovážnej polohy y_1 , ktorá sa za dobu 1 s zdvojnásobí. Vypočítajte y_1 !

$$\left[y_1 = 10 \sin(0,357) = 3,5 \text{ cm} \right]$$

10. Ak zavesíme na určitú pružinu teleso o hmotnosti 2 kg , predĺži sa pružina o $0,06 \text{ m}$. Určte:

- tuhosť pružiny k ,
- predĺženie pružiny, ak na nej visí teleso o hmotnosti 3 kg ,
- s akou frekvenciou bude na pružine kmitať teleso o hmotnosti 4 kg ,
- s akou frekvenciou by toto teleso kmitalo na pružine, ktorá vznikla z predošlej tak, že sme z nej oddelili jej jednu tretinu. Hmotnosť pružiny je zanedbateľná!

$$\left[\begin{aligned} k &= \frac{m_1 g}{y_1} = 327 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}; & y_2 &= \frac{m_2 g}{k} = 0,09 \text{ m}; & f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_3}} = 1,44 \text{ Hz}; \\ f' &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}k}{m_3}} = 1,78 \text{ Hz}. \end{aligned} \right]$$

11. Teleso koná harmonický kmitavý pohyb s periódou $T = 20 \text{ s}$ a amplitúdou $A = 15 \text{ cm}$. V akom časovom rozpätí počas štvrtperiódy nadobudnú výchylky za sebou hodnotu 3 cm a 4 cm ?

$$\left[y_1 = A \sin \omega t_1; \quad y_2 = A \sin \omega(t_1 + \Delta t); \quad \Delta t = 0,22 \text{ s} \right]$$

12. Harmonicky kmitajúci hmotný bod bude mať v čase $t_1 = 0,2 \text{ s}$ po prechode rovnovážnou polohou výchylku $y_1 = 4,5 \text{ cm}$. Vypočítajte jeho frekvenciu f a dobu kmitu T , ak kmitá s amplitúdou $a = 6 \text{ cm}$! Za koľko sekúnd po prechode rovnovážnou polohou dosiahne hmotný bod výchylku $4,5 \text{ cm}$ po druhý krát?

$$\left[f = \frac{\arcsin \frac{y_1}{A}}{2\pi t_1} = 0,67 \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{f} = 1,47 \text{ s}; \quad t_2 = \frac{\pi - \omega t_1}{\omega} = 0,54 \text{ s} \right]$$

13. Hmotný bod kmitajúci s amplitúdou $A = 6$ cm dosiahne v prvej polperióde v časovom rozpätí $\Delta t = 0,001$ s dva razy za sebou výchylku $y = 3$ cm. S akou frekvenciou kmitá?

$$\left[\sin \omega (t_1 + \Delta t) = \sin (\pi - \omega t_1) = \frac{y}{A} ; \quad f = 333,3 \text{ Hz} \right]$$

14. Určte výchylku hmotného bodu konajúceho harmonické kmity s amplitúdou $A = 12$ cm a frekvenciou $f = 15$ Hz v okamžikoch $t_1 = 0,01$ s, $t_2 = 0,02$ s a $t_3 = 0,03$ s od prechodu rovnovážnou polohou! Za aký čas po dosiahnutí maximálnej výchylky nadobudne hmotný bod výchylku $y_3 = 3,71$ cm?

$$\left[\begin{array}{l} y = A \sin 2\pi f t; \quad y_1 = 9,7 \text{ cm}, \quad y_2 = 11,41 \text{ cm}, \quad y_3 = 3,7 \text{ cm} \\ t_A = \frac{\arcsin \frac{A}{A}}{2\pi f} = 0,0166 \text{ s}; \quad \Delta t = t_3 - t_A = 0,0134 \text{ s} \end{array} \right]$$

15. Výchylka hmotného bodu konajúceho harmonické kmity dosiahne za $1/20$ sekundy po prechode rovnovážnou polohou $1/4$ maximálnej výchylky. Aká je jeho frekvencia?

$$\left[f = \frac{\arcsin \frac{1}{4}}{2\pi t} = 0,806 \text{ s} \right]$$

16. Vypočítajte amplitúdu hmotného bodu, ktorý kmitá s frekvenciou $f = 50$ Hz, ak jeho výchylka sa zväčšila počas doby $\Delta t = 0,002$ s z $y_1 = 4$ cm na $y_2 = 8$ cm!

$$\left[\sin \omega t_1 = \frac{y_1}{A}; \quad \sin \omega (t_1 + \Delta t) = \frac{y_2}{A}; \quad A = 9,0 \text{ cm} \right]$$

17. Hmotným prostredím sa šíri postupná vlna s frekvenciou $f = 40$ Hz a rýchlosťou $v = 2 \cdot 10^3$ m s⁻¹ tak, že v mieste rozruchu má hmotný bod amplitúdu $u_0 = 2$ cm. Napíšte rovnicu pre túto vlnu a určte vlnovú dĺžku a periódu!

$$\left[\begin{array}{l} u = 2 \cdot 10^{-2} \sin 4\pi (20 t - 10^{-2} x) \text{ [m]}; \quad \lambda = \frac{v}{f} = 50 \text{ m}; \\ T = \frac{1}{f} = 0,025 \text{ s} \end{array} \right]$$

18. Určte amplitúdu, periódu, vlnovú dĺžku a rýchlosť vlnenia popísaného rovnicou $u = 5 \sin 8\pi \left(t - \frac{x}{2} \right)$ [cm]!

$$\left[u_0 = 5 \text{ cm}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,25 \text{ s}; \quad \lambda = v T = 0,5 \text{ cm}; \quad v = 2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

19. Rovnica postupného vlnenia má tvar $u = 2 \cdot 10^{-5} \sin 200 \left(t - \frac{x}{1500} \right)$ [cm].
Určte:

- a) smer a rýchlosť šírenia sa vlnenia,
 b) jeho vlnovú dĺžku a
 c) amplitúdy a frekvencie kmitov v bodoch P_1 a P_2 o súradniciach $x_1 = 0$ cm a $x_2 = 150$ cm!

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) v smere osi } x, \quad v = 1500 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \text{b) } \lambda = \frac{v}{f} = 47,17 \text{ cm}, \\ \text{c) vo všetkých bodoch bodovej rady sú amplitúdy a frekvencie kmitov rovnaké: } u_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 31,8 \text{ Hz} \end{array} \right]$$

20. Ultrazvukovým zariadením pre meranie morských hĺbok bol zmeraný časový interval $t = 2,04$ s medzi vyslanou ultrazvukovou vlnou a jej ozvenou vzniklou odrazom od morského dna. Aká je hĺbka mora v pozorovanom mieste, keď vzdialenosť vysielača od prijímača meraná horizontálne po hladine bola $\ell = 16,2$ m? (Rýchlosť šírenia sa zvuku v morskej vode je $v = 1480$ m·s⁻¹.)

$$\left[h = \sqrt{\left(\frac{v t}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = 1509,58 \text{ m} \right]$$

21. V určitom prostredí vzniklo stojaté vlnenie skladaním dvoch postupných vlnení s frekvenciou $f = 483$ Hz. Určte ich rýchlosť, ak viete, že vzdialenosť dvoch susedných uzlov $d = 1,5$ m. Vyjadrite závislosť výchylky u od času a polohy pre vlnenia, ak predpokladáme, že sa šírili pozdĺž osi x s amplitúdou $u_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ m.

$$\left[v = 2 d f = 1449 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad u = 2 \cdot 10^{-4} \sin 3034 \left(t + \frac{x}{1449} \right) [\text{m}] \right]$$

22. Určte vzdialenosť dvoch susedných uzlov stojatého vlnenia, ktoré vzniklo skladaním dvoch vlnení periódy $T = 2 \cdot 10^{-2}$ s postupujúcich proti sebe rýchlosťou $v = 1208$ m·s⁻¹ a amplitúdou $u_0 = 0,2$ m. Napíšte rovnicu popisujúcu závislosť výchylky od času a polohy pre tieto vlnenia!

$$\left[d = \frac{v T}{2} = 12,08 \text{ m}; \quad u = 0,2 \sin 314 \left(t + \frac{x}{1208} \right) [\text{m}] \right]$$

23. V strune 150 cm dlhej vzniklo stojaté vlnenie s frekvenciou $f = 0,33$ Hz. Určte vlnovú dĺžku, ak rýchlosť postupu vlnenia v strune je $v = 20$ m·s⁻¹. Koľkým vlnovým dĺžkam odpovedá dĺžka struny? Aký je celkový počet uzlov?

$$\left[\lambda = \frac{v}{f} = 60 \text{ cm}; \quad \ell = 2,5 \lambda; \quad n = \frac{2 \ell}{\lambda} = 5, \quad \text{počet uzlov} = 6 \right]$$

24. V akom pomere sú frekvencie základných tónov dvoch strún dlhých 40 cm a 60 cm, keď struny sú z toho istého materiálu, toho istého prierezu a napínané rovnakou silou?

$$\left[f_1 : f_2 = \ell_2 : \ell_1 = 3 : 2 \right]$$